Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, 04/02/2022

Σημείωση: Να επιλυθούν 4 από τα 5 θέματα.

Θέμα 1
Να διατυπωθεί και να αποδείξετε τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης:

$$y'''(x) + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),\ x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

όπου $a_0, a_1, a_2 \in C(I)$ και I διάστημα.

Θέμα 2
Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E)\quad x^2y''(x) + (x^2 - 3x)y'(x) + 3y(x) = 0.$$

(i) Αποκλειστηκά και μόνο με χρήση δυναμοσειρών, να βρείτε μία λύση y_1 της (E) γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) Να περιγραφή ένας τρόπος εύρεσης ενός βασικού συνόλου λύσεων της εξίσωσης (E).

Θέμα 3
Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E)\quad y'(x) + p(x)y(x) = p(x)\sin\left(\frac{1}{x+1}\right), x \geq 0$$

όπου

$$p(x) = (x+1)\prod_{k=1}^{2021}(x-k), x \geq 0.$$

Εξετάστε την αλήθεια των προτάσεων:

(i) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης (E) τείνουν προς στο 0, για $x \to +\infty$.

(ii) Υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις της εξίσωσης (E).

(iii) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης (E) είναι τελικά θετικές.

Θέμα 4
Δίνονται ένα διάστημα I, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, a_i συνεχείς συναρτήσεις στο I $(i = 1, \ldots, n-1)$ και ο τελεστής $L_n\colon C^{(n)}(I) \to C(I)$ με

$$L_n(y)(x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x),\ y \in C^{(n)}(I), x \in I$$

(i) Αν y_1, y_2, y_3 είναι λύσεις της εξίσωσης $L_n(y)(x) = b(x)$, με $b \in C^(I)$ και $b \neq 0$, να εξετασετε την αλήθεια των προτάσεων:

  (a) Η συνάρτηση $y_1 - y_2$ είναι λύση της εξίσωσης $L_n(y) = b$.

  (b) Η συνάρτηση $y = ky_1 + my_2 - (k+m)y_3$ είναι λύση της εξίσωσης $L_n(y) = 0$.

(ii) Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = 1+x+x^2$, $y_2(x) = 1-x+x^2$, $y_3(x) = \cos x+\sin x+x^2$, $y_4(x) = \cos x - \sin x + x^2$, $y_5(x) = x^2, x \in I$ είναι λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τέταρτης τάξης $L_4(y)(x) = b(x), x \in I, b \neq 0$,

   (a) αν το 0 περιέχεται στο I, να βρείτε ένα βασικό σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $L_4(y) = 0$ και να προσδιορίσετε το (ευρύτερο) διάστημα I.

   (b) Να υποδείξετε έναν τρόπο προσδιορισμού της γενικής λύσης της εξίσωσης $L_4(y) = b$, με $b \in C^(I)$ και $b \neq 0$.

Θέμα 5

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = \frac{(2x+2)e^{-y^2}\cos y + 2021}{x^2 - 2x - 35}, \quad y(0) = 0.$$

Εξετάστε την αλήθεια των ισχυρισμών:

(i) Το π.α.τ έχει ακριβώς μια λύση y_0 η οποία ορίζεται σ΄ ολόκληρο το διάστημα $I = (-5, 7)$.

(ii) Η λύση y_0 έχει περισσότερες από μία ρίζες στο πεδίο ορισμού της I.

(iii) Ισχύει $xy_0(x) \leq 0, x \in I$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ